XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задачи для 10 класса

Решение задачи 1

Обозначим через x число букв, получившихся при наборе цифры 7 (их может быть от 1 до 3), y – число букв при наборе цифры 5 (1 или 2) и z – число букв при наборе цифры 9 (от 2 до 5). Перечислим возможные варианты представления числа 10 в виде суммы x+1+y+1+z:

1) 3+1+2+1+3; 2) 3+1+1+1+4; 3) 2+1+2+1+4; 4) 2+1+1+1+5; 5) 1+1+2+1+5.

Для варианта 1 получить три буквы, нажимая 7, можно только одним способом; получить две буквы, нажимая 5, можно опять-таки только одним способом; а вот получить три буквы с помощью пяти девяток можно 6 способами. В итоге, для варианта 1 имеем $1 \cdot 1 \cdot 6$ вариантов паролей, аналогично для варианта 2 будет $1 \cdot 1 \cdot 4$ вариантов паролей и т.д. Всего получаем 6+4+2$\cdot$4+2+1=21 вариант.

Ответ: 21.

Решение задачи 2

Разность значений квадратичной функции должна делиться на разность значений аргументов. Проверим выполнение этого факта для различных пар значений:

- для первого и второго: 357–273=84 делится на 3;

- для третьего и четвертого: 497–391=106 не делится на 3; следовательно, значение исказили или гномы, или орки;

- для первого и третьего: 391–273=118 не делится на 4, следовательно, значение исказили тролли или гномы.

- для второго и четвертого: 497–357=140 делится на 4.

Ответ: Гномы сообщили неверное значение.

Решение задачи 3

Сначала заметим, что после первого оборота количество дуг равно 2^2, после второго – 2^3, после последнего – 2^{n+1}. Пусть после оборота с номером k, $1 \le k \le n$ в точках деления окружности на дуги расположены числа $x_1, x_2, ..., x_{2^{k+1}}$.Тогда в ходе оборота с номером $k+1$ на окружности появятся следующие новые числа

$$y_1 = \frac{3x_1 + 3x_2}{2},\ y_2 = \frac{3x_2 + 3x_3}{2}, \ldots,\ y_{2^{k+1}} = \frac{3x_{2^{k+1}} + 3x_1}{2}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}} y_i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{2^{k+1}} x_i .$$

Значит, после $k+1$ оборота сумма всех чисел на окружности возрастёт в 4 раза. Если учесть, что первоначальная сумма чисел на окружности равнялась 6, то получаем окончательный ответ.

Ответ: $6 \cdot 4^n$.

Решение задачи 4

Граф, используемый в задаче, обладает следующим свойством: из множества всех его вершин можно выделить такое подмножество *V* (отмеченное на рис. 5 кружочками), что любая вершина графа лежит в окрестности ровно одной вершины из *V*. Окрестностью вершины графа называют множество соседних с ней вершин, включая её саму. Очевидно, что искомое число равно сумме чисел, расположенных в вершинах из множества *V*: $112+104+96+144+136+128+120=840$.

Ответ: 840.

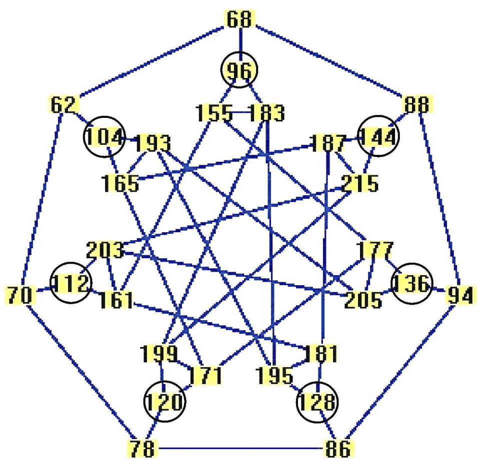

Рис. 5

Решение задачи 5

Составим, исходя из условия задачи, систему неравенств и запишем ее в виде двух подсистем:

$$\begin{cases} 0 < c, \\ a_4 < c, \\ a_3 \ge c, \\ a_3 + a_4 \ge c, \\ a_2 < c, \\ a_2 + a_4 < c, \\ a_2 + a_3 < c, \\ a_2 + a_3 + a_4 < c; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 < c, \\ a_1 + a_4 \ge c, \\ a_1 + a_3 \ge c, \\ a_1 + a_3 + a_4 \ge c, \\ a_1 + a_2 < c, \\ a_1 + a_2 + a_4 < c, \\ a_1 + a_2 + a_3 \ge c, \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ge c. \end{cases}$$

Из первой подсистемы получаем:

$$\begin{cases} a_3 \ge c \\ a_2 + a_3 + a_4 < c \end{cases} \Rightarrow a_2 + a_4 < 0.$$

Из второй подсистемы получаем:

$$\begin{cases} a_1 < c \\ a_1 + a_4 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_4 > 0;$$

$$\begin{cases} a_1 < c \\ a_1 + a_2 + a_3 \ge c \end{cases} \Rightarrow a_2 + a_3 > 0.$$

Подбираем некоторые целые числа, удовлетворяющие полученным соотношениям, например $a_4 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$. Подставляем их в первую подсистему, тогда $2 < c \le 3$. Полагаем $c = 3$ и подставляем во вторую подсистему, получаем $2 \le a_1 < 3$, тогда выбираем $a_1 = 2$.

Решение задачи 6

По двум последним строкам можно восстановить обратную перестановку и использовать её для расшифрования первого сообщения. Из-за повторов букв в полученных строках сделать это однозначно удаётся не всегда. Таким образом, задача сводится к выбору букв из столбцов глубины не более трёх, которые дают читаемый текст. Жирным шрифтом выделены выбранные буквы, в серых клетках указаны уже использованные буквы, не участвующие в выборе.

И	К	Л	М	Н	О	И	К	Л	М	Н	О	И	К	Л	М	Н	О	С	Т
И	К	О	О	К	М	Т	И	С	О	Н	И	Л	Н	Л	К	М	Л	М	Н
Варианты обратной перестановки:																			
1	2	6	6	2	4	20	1	19	6	5	1	3	5	3	2	4	3	4	5
7	8	12	12	8	10	20	7	19	12	11	7	9	11	9	8	10	9	10	11
13	14	18	18	14	16	20	13	19	18	17	13	15	17	15	14	16	15	16	17
Варианты открытого текста:																			
Н	**К**	М	М	К	А	Б	**Н**	И	**М**	К	Н	Б	**К**	Б	К	**А**	**Б**	А	К
О	Р	А	**А**	Р	Л	**Б**	О	**И**	А	**А**	О	О	А	**О**	**Р**	Л	О	**Л**	А
Е	Н	**Е**	Е	**Н**	**О**	Б	Е	И	Е	И	**Е**	**Т**	И	Т	Н	О	Т	О	**И**

Ответ: океан обнимает корабли

Критерии определения победителей и призеров XX межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии

Жюри XX Межрегиональной олимпиады школьников по математике и криптографии установило следующие критерии определения победителей и призеров среди учащихся 10 классов:

1 место – решены все шесть задач, возможно, с одним существенным или двумя несущественными недостатками;

2 место – решены пять задач, возможно, с двумя несущественными недостатками;

3 место – решены четыре задачи, возможно с одним несущественным недостатком.